Korelacije- neraskidiva veza fizike i matematike

Patricija Nikolaus, Danijel Hribar

Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka, Republika Hrvatska

Apstrakt. U radu će biti prikazano modeliranje nastavnih sadržaja fizike uz korištenje matematike kao alata na primjerima numeričkih zadataka iz nastavne prakse plana i programa za opću i prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Primjeri numeričkih zadataka sadržavati će sadržaje iz područja Kvadratna funkcija i kvadratna jednadžba, Trigonometrija pravokutnog trokuta, Poučci o trokutu, Primjena eksponencijalne i logaritamske funkcije.

Ključne riječi: modeliranje, korelacija, fizika, matematika.

UVOD

Poučavajući matematiku i fiziku često nailazimo na pitanja poput „Zašto to učimo?“ i „Gdje će nam to u životu trebati?“. Pitanja učenika treba shvatiti ozbiljno te se potruditi dati adekvatne odgovore. Odgovori poput „To je u programu i zato to učite...“ sigurno neće poticajno djelovati na učenike. Svaki nastavnik treba se potruditi objasniti zašto nešto učimo. Navesti i objasniti razloge za to nije uvijek lako. Npr. „Učenje računa s postocima pomoći će nam prilikom kupovine na sniženjima ili računanja dohotka nakon povećanja za određeni postotak ...“ Ovakav odgovor sigurno će motivirajuće djelovati na učenike,a znamo da motiviran učenik uči i usvaja nove pojmove daleko bolje i uspješnije od nemotiviranog za rad. Teško je biti motiviran 7 sati na dan, 5 dana u tjednu[1].

Veliku važnost u nastavi matematike ima matematičko modeliranje. Amalija Žakelj u svom radu [2] navodi da je matematičko modeliranje pronalaženje i testiranje matematičkog prikaza (modela) za neki realan objekt ili proces. U odabrane situacije unosimo načela i principe matematike i tako prevodimo realnost u matematičku okolinu. Modeliranje pretpostavlja poznavanje modeliranih pojava (fizičkih zakona), matematičkih alata, tehnika modeliranja i kritičnosti kod upotrebe modela. Kod sastavljanja matematičkog modela poštujemo fizičke ili neke druge zakone[1,2].

Osim korelacije unutar samog predmeta korisno je u nastavi kada je to moguće uključiti i korelaciju među predmetima. U ovom radu će uz modeliranje matematičkih pojmova naglasak biti upravo na korelaciji matematike i fizike. Navest ćemo sedam primjera matematičkog modeliranja fizičkih zakona,te istaknuti neke od problema koji se javljaju prilikom njihovog rješavanja. Jedan od problema je nemogućnost koreliranja među predmetima u trenutku učenja određenog nastavnog sadržaja [1].

Dio ovog rada objavljen je pod nazivom Modeliranje nastavnih sadržaja fizike uz korištenje matematike kao alata na 10. stručno-metodičkom skupu nastavnika matematike u Puli 2017. godine.

МОДЕЛИРАЊЕ КВАДРАТНОМ ФУНКЦИЈОМ

Primjer 1. Ugledavši autobus na stanici čovjek potrči prema njemu stalnom brzinom od 4 m/s. Došavši na udaljenost 6m iza zadnjih vrata autobusa, autobus kreće sa stanice stalnim ubrzanjem od 1.2 m/s^2. Za koliko vremena će čovjek stići do zadnjih vrata autobusa[3]?

Rješenje:

$$s_č = v_č t \qquad s_a = s_0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$s_č = s_a$$

$$4t = 6 + 0.6t^2$$

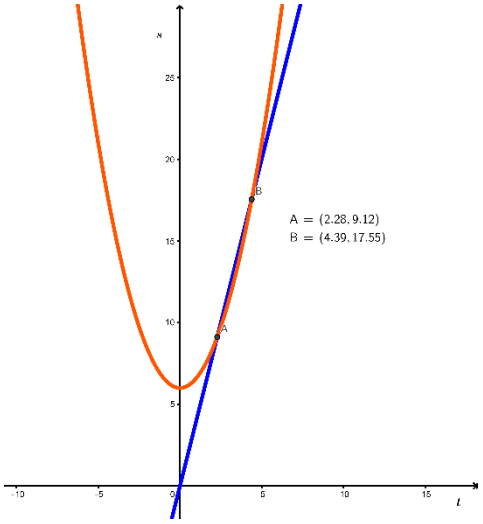
Nakon sređivanja dobije se kvadratna jednadžba oblika:

$$3t^2 - 20t + 30 = 0$$

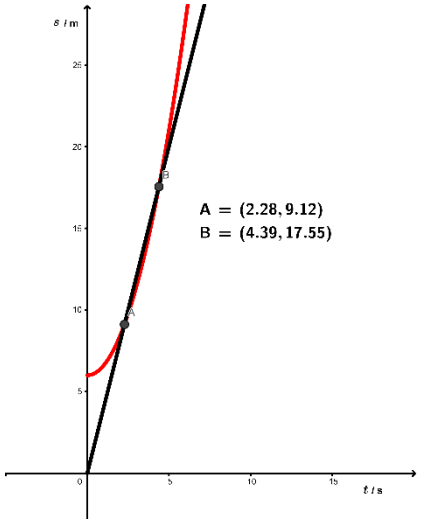
s rješenjima $t_1 = 2.28\ \text{s}$ i $t_2 = 4.39\ \text{s}$

Rješenje t_1 predstavlja vrijeme koje je čovjeku potrebno da prvi put stigne do vrata. To je rješenje zadatka gledano sa stajališta fizike, budući se čovjek ukrcao u autobus. No što je s rješenjem t_2? Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobijemo i „drugo“ rješenje tj. mogućnost da je čovjek nastavio trčati konstantnom brzinom i prestigao autobus. Budući da autobus jednoliko ubrzava u trenutku t_2 će sustići čovjeka i on će imati „drugu priliku“ za ukrcaj.

Ovaj zadatak moguće je zadati i na nastavi matematike u 2.razredu srednje škole, pri obradi primjene kvadratne jednadžbe ili pri obradi presjeka pravca i parabole(slika 1a) s naglaskom na izbor varijable $t \in [0, +\infty\rangle$(slika 1b).



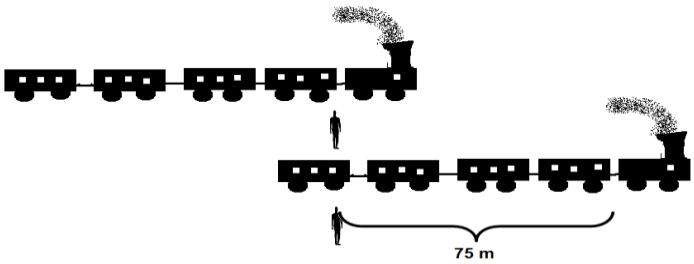
SLIKA 1 a. Grafički prikaz u matematici



SLIKA 1 b. Grafički prikaz u fizici

Na nastavi fizike u 1.razredu srednje škole nije moguće zadati zadatak s ovim podacima budući se kvadratna jednadžba obrađuje na nastavi matematike tek u 2.razredu srednje škole. Ukoliko se u zadatku uzmu sljedeće vrijednosti $v_č = 5\frac{m}{s}$, $a = 2\frac{m}{s^2}$, $s_0 = 6m$, onda se kvadratna jednadžba $t^2 - 5t + 6 = 0$ može rastavom na faktore kvadratnog trinoma napisati u obliku $(t-3)(t-2) = 0$, s rješenjima $t_1 = 2\ \text{s}$ i $t_2 = 3\ \text{s}$[1].

Primjer 2. Promatrač stoji na peronu i primjeti da prvi vagon vlaka, koji ulazi u postaju jednoliko se usporavajući, prođe pokraj njega za 4 s, a drugi vagon za 5 s. Prednji kraj prvog vagona vlaka zaustavi se 75 m od mirnog promatrača Kolika je početna brzina vlaka kad počinje prolaziti pokraj promatrača [4]?



SLIKA 2. Skica uz postavku zadatka

Rješenje:

Ulazeći u postaju prvi vagon vlaka koji jednoliko usporava prolazi pokraj mirnog promatrača i za $t = 4s\ h$ prijeđe put koji je jednak duljini jednog vagona

$$l = v_0 t - \frac{a}{2}t^2 \Longrightarrow l = 4\text{s} \cdot v_0 - 8s^2 \cdot a. \quad (1)$$

Na isti način drugi vagon u vremenu $t_1 = 5s$ prijeđe put jednak duljini vagona,

$$l = 5\text{s} \cdot v_1 - \frac{25}{2}\text{s}^2 \cdot a. \quad (2)$$

Poznavajući vezu između brzina v_1 i v_0 tj.$v_1 = v_0 - at$ i uvrštavanjem u izraz (2) dobijemo izraz za duljinu vagon

$$l = 5\text{s} \cdot v_0 - \frac{65}{2}\text{s}^2 \cdot a \quad (3)$$

Izjednačavajući izraze (1) i (3) slijedi

$$v_0 = \frac{49}{2}\text{s} \cdot a. \quad (4)$$

Budući je do zaustavljanja vlaka prvi vagon prešao put od 75 m (slika 2.) možemo iz izraza za brzinu kod jednolikog usporenog gibanja $v^2 = v_0^2 - 2as$ dobiti izraz koji povezuje ubrzanje vagona i početnu brzinu v_0

$$a = \frac{v_0^2}{150\text{m}}. \quad (5)$$

Uvrštavanjem izraza (5) u izraz (4) dobijemo kvadratnu jednadžbu oblika

$$\frac{49\text{s}}{300\text{m}}v_0^2 - v_0 = 0 \Rightarrow v_0\left(\frac{49\text{s}}{300\text{m}}v_0 - 1\right) = 0 \quad (6)$$

s rješenjima $v_{01} = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $v_{02} = \frac{300}{49}\frac{m}{s}$.

Na nastavi fizike rješenje v_{01} odbacujemo jer se vagon giba jednoliko usporeno pa mu početna brzina mora biti različita od nule. Jednadžbu (6) možemo dijeliti sa v_0 znajući da time ne gubimo rješenje. Ovaj zadatak možemo zadati i na nastavi matematike u 2.razredu srednje škole prilikom obrade primjene kvadratne jednadžbe.Ukoliko se nastavnik matematike odluči za zadavanje ovakvog i sličnih zadataka potrebno je s učenicima prokomentirati rješenja v_{01} i v_{02}.

Primjer 3.Na kojoj visini$h$iznad površine Zemlje ubrzanje slobodnog pada g_h je četiri puta manje nego ubrzanje slobodnog pada g_Z na površini Zemlje[4]?

Rješenje:

$$g_Z = G\frac{M}{R^2} \quad g_h = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

$$\frac{g_h}{g_Z} = \frac{G\frac{M}{(R+h)^2}}{G\frac{M}{R^2}}$$

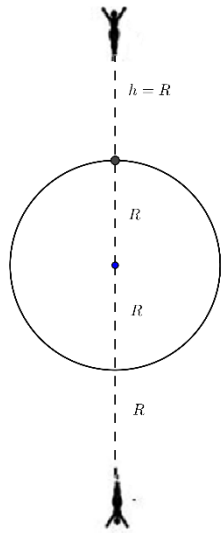
$$\frac{1}{4} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$4R^2 = (R+h)^2$$

U 1.razredu srednje škole na nastavi fizike zadatak rješavamo na način da jednakost korjenujemo. Dolazimo do rješenja zadatka

$$2R = R + h \Longrightarrow h = R.$$

U nastavi matematike isti zadatak može se rješavati u 2. razredu srednje škole rješavanjem kvadratne jednadžbe oblika $h^2 + 2Rh - 3R^2 = 0$ s rješenjima $h_1 = R$ i $h_2 = -3R$.

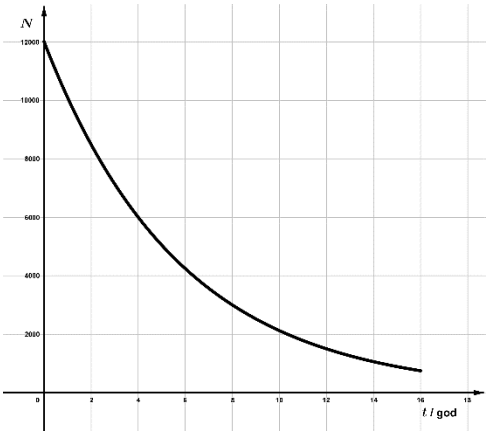


SLIKA 3. Slikoviti prikaz rješenja

Sa stajališta fizike rješenje h_2 ima isto značenje kao i rješenje h_1 , te se stoga ni ne navodi (slika 3.) [1].

Modeliranjeeksponencijalnom i logaritamskom funkcijom

Primjer 4. Raspad nekog elementa dan je grafom. Odredite broj neraspadnutih čestica nakon 19 godina?



SLIKA 4. Grafički prikaz raspada nekog elementa

Rješenje: „Čitajući graf“ (slika 4.) zaključujemo $N_0 = 12000,\ T_{1/2} = 4\ \text{god}, t = 19\ \text{god}$

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

$$N = 445$$

Primjer 5.Radnim danom razina buke blizu autoputa kada tijekom jedne minute prolazi oko 100 automobila iznosi 70 dB. Vikendom tijekom jednakog vremena prolazi oko 25 automobila. Kolika će tada biti razina buke na istom mjestu [4]?

Rješenje:

$$I_1 = 100\, I \quad ;\ I_2 = 25\, I$$

$$L_2 - L_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$L_2 - L_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

$$L_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} + L_1$$

$$L_2 = 10 \log \frac{25I}{100I} + 70\text{dB}$$

$$L_2 = 63.98\ dB$$

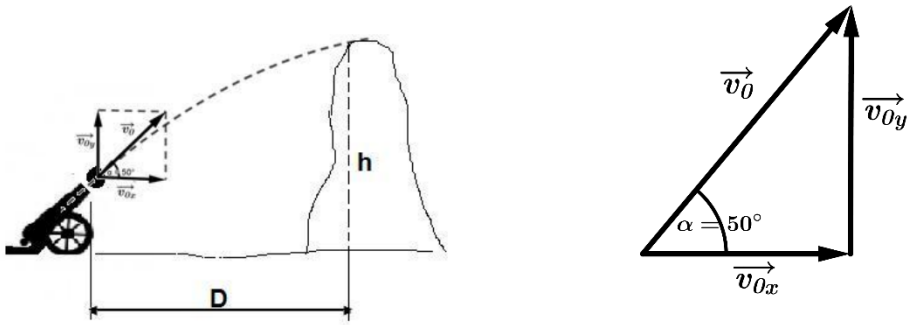
Ovaj se zadatak na nastavi fizike rješava u 3. razredu srednje škole bez poteškoća jer su učenici usvojili pojmove vezane za logaritamsku funkciju u 2.razredu srednje škole.

Ukoliko ovaj zadatak zadajemo prilikom obrade primjene logaritamske funkcije u 2.razredu srednje škole dolazimo do poteškoća vezanih za fizikalno razumijevanje samog problema. Učenici koriste izraz$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ kao gotovu „formulu“ u koju moraju uvrstiti podatke[1].

MODELIRANJE TRIGONOMETRIJOM PRAVOKUTNOG TROKUTA

Primjer 6. Projektil je izbačen s tla početnom brzinom od 95 m/s pod kutom od 50° prema horizontali. Nakon 5 s udara u vrh brda. Kolika je visina brda? Na kojoj horizontalnoj udaljenosti od mjesta ispucavanja će projektil pasti na brdo[3]?

Rješenje:



SLIKA 5. Skica uz rješenje zadatka

$v_0 = 95\frac{m}{s}$; $\alpha = 50°$; $t = 5s$

Komponente početne brzine dobijemo primjenom trigonometrijskih funkcija šiljastoga kuta na zadani pravokutni trokut (slika 5.)

$$v_{0x} = v_0 cos\alpha = 61{,}1 \text{ m/s}$$
$$v_{oy} = v_0 sin\alpha = 72{,}8 \text{ m/s}$$

U bilo kojem trenutku visina projektila dobije se iz izraza

$$h = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$h = 241\ m$$

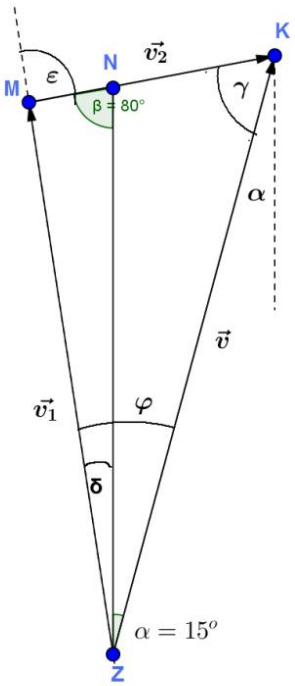
Put prijeđen u horizontalnom smjeru jednak je

$$D = v_{0x}t \Rightarrow D = 305\ m$$

Zadatak jena nastavi fizke u 1.razredu srednje škole moguće zadati učenicima ako su mjere šiljastih kutova u pravokutnom trokutu 30°, 45° ili 60° . Na nastavi matematike ovakav zadatak zadajemo prilikom obrade primjene trigonometrije pravokutnog trokuta za bilo koji odabir veličine šiljastoga kuta.

Modeliranje poučcima o trokutu

Primjer 7. Sportski zrakoplov koji može letjeti brzinom 180 km/h u odnosu na zrak treba doletjeti iz mjesta Z prema sjeveru u mjesto K. Smjer Z-K zatvara s meridijanom kut α=15°, a za vrijeme leta sa zapada puše vjetar brzine 60 km/h koji s meridijanom zatvara kut β=80°. Odredi smjer leta i brzinu zrakoplova[5]?



SLIKA 6. Vektorski prikaz brzina

Rješenje:

Brzina $\vec{v}$ kojom se zrakoplov giba u odnosu na površinu Zemlje rezultantna je brzina zrakoplova u odnosu na zrak $\overrightarrow{v_1}$i brzine vjetra $\overrightarrow{v_2}$.

$$\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \gamma = 65°$$

Promatrajući trokut ZKM sa slike 6. primjenom poučka o sinusima dobivamo

$$\frac{v_2}{sin\varphi} = \frac{v_1}{sin\gamma} \Rightarrow sin\varphi = \frac{v_2 sin\gamma}{v_1}\text{tj.}$$

$$\varphi = 17.58°$$

Dakle, zrakoplov treba letjeti pod kutem $\delta = \varphi - \alpha = 2.58°$ prema sjeverozapadu.
Mjera kuta između vektora $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ je $\varepsilon = \gamma + \varphi = 82.58°$ i primjenom poučka o kosinusu na trokut ZKM sa slike 6. slijedi

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 cos(\pi - \varepsilon) \Rightarrow v = 197\ \text{km/h}$$

Iako sadržaj zadatka pripada nastavnoj temi fizike 1.razreda srednje škole , učenici nemaju dovoljno matematičkog predznanja da bi ovaj zadatak uspješno riješili. To će biti moguće tek nakon obrade Poučaka o trokutu u 3.razredu srednje škole na nastavi matematike.
Ovakav zadatak možemo zadati učenicima na nastavi matematike pri ponavljanju gradiva cjeline Poučci o trokutu na kojem će učenici povezati i primjeniti usvojene nastavne sadržaje fizike 1.razreda srednje škole [1].

U ovom radu ukazali smo na neraskidivu vezu matematike i fizike. Međutim neusklađenost Nastavnog plana i programa matematike i fizike često dovodi do poteškoća prilikom rješavanja pojedinih numeričkih primjera u danom trenutku. Nastavnici matematike i fizike trebali bi veliku važnost usmjeriti na interpretaciju dobivenih rješenja.

ZAHVALNICA

Zahvaljujemo se našim učenicima što nas potiču da budemo bolji nastavnici.

LITERATURA

1. P. Nikolaus, D. Hribar, Modeliranje nastavnih sadržaja fizike uz korištenje matematike kao alata, Zbornik radova 10. stručno-metodički skup Modeliranje i matematika, 306-315, 2017.
2. A. Žakelj, Modeliranje u nastavi matematike, *MIŠ*, Br.78 (2015), 105-110. http://mis.element.hr/fajli/1369/78-03.pdf (28.06.2017.)
3. A. Halpern, 3000 solved problems in Physics, Schaum's Outline Series, USA, *Mc Graw Hill*, 2011.
4. N. Brković, Zbirka zadataka iz fizike, *Luk d.o.o*, Zagreb, 2001.
5. S. Muić, Fizika, Zbirka zadataka za srednje škole, *Element,* Zagreb, 2005.